

Érdekes feladatok

1. Feladat: Halmazelmélet

Adjunk meg hat közös elem nélküli halmazt $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \emptyset)$ úgy, hogy közülük bármelyik hatnál kevesebbet (akár ötöt) kiválasztva, azok metszete ne legyen üres.

2. Feladat: Kombinatorika

Állítsuk sorba az $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$ számokat úgy, hogy ne tartalmazzon 3-nál hosszabb monoton (akár növekvő, akár csökkenő) részsorozatot.

Pl. a $6\ 1\ 7\ 8\ 2\ 5\ 3\ 4\ 9$ sorozatból néhány példa:

5 hosszúságú növekvő részsorozat: $1\ 2\ 3\ 4\ 9$

4 hosszúságú növekvő részsorozat: $6\ 7\ 8\ 9$ vagy $1\ 7\ 8\ 9$

3 hosszúságú növekvő részsorozat: $3\ 4\ 9$ vagy $7\ 8\ 9$

2 hosszúságú növekvő részsorozat: $8\ 9$

3 hosszúságú csökkenő részsorozat: $7\ 5\ 4$ vagy $6\ 5\ 3$

1 hosszúságú csökkenő részsorozat: 2

2+ Feladat: Kombinatorika

Bizonyítandó, hogy tíz (különböző) szám esetén már mindenképpen keletkezik 3-nál hosszabb monoton részsorozat.

3. Feladat: Gráfelmélet

Tíz sikeresen levizsgázott hallgató pingpong körmérkőzést szervez (mindenki mindenkivel egyszer játszik), csak egy asztal van és a mérkőzések bármilyen sorrendben követhetik egymást.

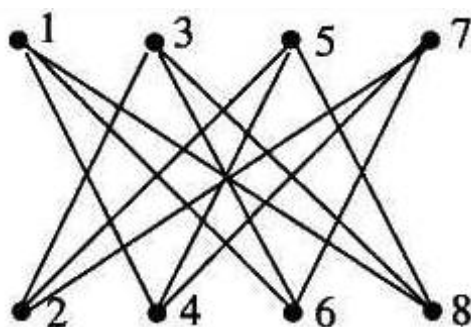
Bizonyítsuk be, hogy akárhány mérkőzést bonyolítottak le, mindig van legalább két hallgató, aki ugyanannyiszor játszott.

3+ Feladat: Gráfelmélet

Bizonyítsuk be, hogy az összes meccs lejátszása után - bármi is volt az eredmény - a hallgatók sorba állíthatók úgy, hogy (az utolsó kivételével) mindenki legyőzte a közvetlen mögötte állót.

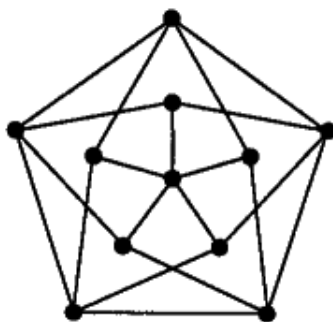
4. Feladat: Gráfelmélet

Rajzoljuk le a gráfot az élek keresztezése nélkül. (Síkgráf.)



5. Feladat: Gráfelmélet

Rajzoljuk be a gráf egyik Hamilton-körét.



6. Feladat: Integrálás

$$\int 2 \cos x \cdot \sin x \, dx = 2 \int (\sin x)' \cdot (\sin x)^1 \, dx = 2 \cdot \frac{(\sin x)^2}{2} + C = \sin^2 x + C$$
$$\int 2 \cos x \cdot \sin x \, dx = 2 \int -(\cos x)' \cdot (\cos x)^1 \, dx = -2 \cdot \frac{(\cos x)^2}{2} + C = -\cos^2 x + C$$

Miért kapunk más megoldást?

7. Feladat: Integrálás

$$a) \int \left(\frac{3}{4x-5} \right)^{2019} dx = \quad b) \int e^x \cos x \, dx = \quad c) \int \cos 7x \sin 5x \, dx =$$

8. Feladat: Geometria

Egy négyzetből kivágtunk egy (lineárisan) fele akkora négyzetet (ld.ábra).



A megmaradt alakzatot (tkp. hatszög) daraboljuk fel

- két
- három
- négy

egybevágó alakzatra.

9. Feladat: Geometria

Ismeretes, hogy konvex sokszög bármely belső pontjából (teljes) rálátás nyílik, az összes oldalra, viszont egy konkáv sokszögnek van olyan belső pontja, ahonnan nem lehet (teljesen) rálátni az összes oldalra.

Feladat: rajzolj olyan (csak konkáv jöhet szóba) sokszöget, melyben található(k) olyan pont(ok) ahonnan egyetlen oldalra sem lehet (teljesen) rálátni.

10. Feladat: Geometria

Vágjunk fel egy körlapot 12 egybevágó síkidomra, de a vágáshoz használt vonalszakaszok közül ne menjen át mindegyik a kör középpontján.

11. Feladat

Hogyan folytatódik a következő sorozat? 1 11 21 1211 111221 ...

matek.x3.hu

matek-tanitas@freemail.hu

logaritmus@t-online.hu