

Integrálás

Alapfüggvények integráljai

Hatványfüggvények.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Exponenciális függvények .

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Trigonometrikus függvények.

$$\begin{aligned} \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + C & \int \operatorname{tg} x dx &= -\ln|\cos x| + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C & \int \operatorname{ctg} x dx &= \ln|\sin x| + C \end{aligned}$$

Racionális törtfüggvények.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x + C \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C & (|x| < -1) \\ \operatorname{arch} x + C & (1 < |x|) \end{cases} \end{aligned}$$

Irracionális függvények.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{arch} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad (1 < x) \end{aligned}$$

Hiperbolikus függvények.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C & \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} &= -\operatorname{cth} x + C & \int \operatorname{th} x dx &= \ln|\operatorname{ch} x| + C \\ \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C & \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{th} x + C & \int \operatorname{cth} x dx &= \ln|\operatorname{sh} x| + C \end{aligned}$$

Integrálási szabályok

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad \left(\text{ha } \int f(x) dx = F(x) + C \right)$$

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \quad (\text{parciális integrálás})$$

R(sin x, cos x) alakú integrál.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t} \quad \text{helyettesítendő}$$

R(x, $\sqrt{\pm x^2 \pm 1}$) alakú integrál.

$$R(x, \sqrt{x^2 + 1})x \quad \Longrightarrow \quad x = \operatorname{sh} t \quad \text{vagy} \quad x = \operatorname{tg} t \quad \text{helyettesítendő.}$$

$$R(x, \sqrt{x^2 - 1})x \quad \Longrightarrow \quad x = \operatorname{ch} t \quad \text{vagy} \quad x = \operatorname{sec} t \quad \text{helyettesítendő.}$$

$$R(x, \sqrt{1 - x^2})x \quad \Longrightarrow \quad x = \sin t \quad \text{vagy} \quad x = \cos t \quad \text{helyettesítendő.}$$

matek.x3.hu

matek@x3.hu