Vektorgeometriai segédlet

Térbeli vektor megadása: $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; a_3) \quad = \quad a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$

(A vektor jelölése - a skalártól való megkülönböztetés céljából - nyomtatásban vastagbetűs: $\boldsymbol{a}$, kézírásban: $\underline{a}$, néha: $\vec{a}$)

Az x, y, z tengelyekkel párhuzamos egységvektorok:
$\boldsymbol{i} = (1;0;0), \qquad \boldsymbol{j} = (0;1;0), \qquad \boldsymbol{k} = (0;0;1)$

Vektor hossza/abszolút értéke : $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$

Egységnyi vektor: $\boldsymbol{a}$ irányú, egységnyi vektor : $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$

(A tömörség kedvéért néha előfordul az $\boldsymbol{a}^0$, vagy $\boldsymbol{a}_0$, vagy e_a jelölés.)

Műveletek vektorokkal:

Összeadás: *(két vektor → vektor)*
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\, a_1 + b_1 \,;\, a_2 + b_2 \,;\, a_3 + b_3 \,)$

Skalárral való szorzás: *(skalár, vektor → vektor)*
$\lambda\boldsymbol{a} = (\, \lambda a_1 \,;\, \lambda a_2 \,;\, \lambda a_3 \,) \qquad (\lambda \in \boldsymbol{R})$

Skalárszorzat: *(két vektor → skalár)*
$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\sphericalangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Vektoriális szorzat: *(két vektor → vektor)*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\boldsymbol{k}$$

- *Az kapott vektor hossza az eredeti vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe:* $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\sphericalangle$
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *merőleges* $\boldsymbol{a}$*-ra és* $\boldsymbol{b}$*-re*
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *jobb-rendszert alkotnak.*

Vegyesszorzat: *(három vektor → skalár)*

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Néhány alkalmazás:

Vektorok hajlásszöge: $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\sphericalangle = \dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Merőlegesség: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{ab}=0$

Párhuzamosság: $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

Síkbeliség: $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ egy síkba esnek (komplanárisak) $\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{abc}=0$

Háromszög területe: $\dfrac{1}{2}\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$

Tetraéder térfogata: $\dfrac{1}{6}\,|\boldsymbol{abc}|$

Síkra merőleges vektorok előállítása: Az $\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$ vektorok
által kifeszített síkra merőleges vektorok: $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad (\lambda\in\boldsymbol{R})$

Vektor vetületei: $(\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0})$

$\boldsymbol{a}$-nak $\boldsymbol{v}$ irányú hossza: $\dfrac{\boldsymbol{va}}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{v}^0\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}$-nak $\boldsymbol{v}$ irányú vetülete: $\dfrac{(\boldsymbol{va})\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}=(\boldsymbol{v}^0\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}^0$

$\boldsymbol{a}$-nak $\boldsymbol{v}$-re merőleges hossza: $\dfrac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|}=\left|\boldsymbol{v}^0\times\boldsymbol{a}\right|$

$\boldsymbol{a}$-nak $\boldsymbol{v}$-re merőleges vetülete: $\dfrac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}=(\boldsymbol{v}^0\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{v}^0$

Egyenes egyenlete:

A $P_0(x_0;y_0;z_0)$ pontra illeszkedő $\boldsymbol{v}(v_1;v_2;v_3)$ $(\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0})$ irányvektorú egyenes

- paraméteres egyenletrendszere: $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0+t\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP})$

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+tv_1\\ y&=y_0+tv_2\\ z&=z_0+tv_3 \end{aligned}\right\} \qquad (t\in\boldsymbol{R})$$

- implicit egyenletrendszere: $\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3} \qquad (v_1,v_2,v_3\neq 0)$

Sík egyenlete:

A $P_0(x_0;y_0;z_0)$ pontra illeszkedő $\boldsymbol{n}(a;b;c)$ $(\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0})$ normálvektorú
sík (implicit) egyenlete: $(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{n}=0$
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad\longrightarrow\quad ax+by+cz+d=0$

Pont és egyenes távolsága:

A $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pontnak a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ pontra illeszkedő $\boldsymbol{v}$ irányvektorú egyenestől való távolsága:

$$\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \boldsymbol{v}^0\right|$$

Pont és sík távolsága:

A $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pont távolsága az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletű síktól:

$$\left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

Párhuzamos egyenesek távolsága:

P, illetve Q pontokra illeszkedő $\boldsymbol{v}$ irányvektorú egyenesek távolsága:

$$\frac{\left|(\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{PQ}) \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|^2} = \left|(\boldsymbol{v}^0 \times \overrightarrow{PQ}) \times \boldsymbol{v}^0\right|$$

Kitérő egyenesek távolsága:

A P, illetve Q pontokra illeszkedő $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{w}$ irányvektorú kitérő egyenesek távolsága:

$$\left|\frac{\overrightarrow{PQ}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|}\right| = \frac{\left|\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\overrightarrow{PQ}\right|}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|} = \left|\boldsymbol{v}^0\boldsymbol{w}^0\overrightarrow{PQ}\right|$$

Párhuzamos síkok távolsága:

- A P, illetve Q pontokra illeszkedő $\boldsymbol{n}$ normálvektorú síkok távolsága:

$$\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{n}^0$$

- Az $ax + by + cz + d_1 = 0$, $ax + by + cz + d_2 = 0$ egyenletekkel adott (párhuzamos) síkok távolsága:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

---

matek.x3.hu

matek@x3.hu